$f: A \to B \qquad X \subseteq A, \ Y \subseteq B$

$f(X) = \{ y \in B : (\exists x \in X) \ y = f(x) \} = \{ f(x) : x \in X \}$

$f^{-1}(Y) = \{ x \in A : (\exists y \in f(x)) \} = \{ x : f(x) \in Y \}$

$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y), \ X \subseteq A, \ Y \subseteq A$

<u>ΠΡΟΤ</u> : $f: A \to B$ συνάρτηση τότε : f αμφιμονοσήμαντη $\iff$ $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ για όλα τα $X \subseteq A, Y \subseteq A$ $\{*\}$

<u>Αποδ</u> $(\Rightarrow)$ Έστω f αμφιμονοσήμαντη

Ισχύει γενικά $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

Άρα αρκεί ν.δ.ο f αμφιμον $\Rightarrow f(X \cap Y) \supseteq f(X) \cap f(Y)$

Θεωρούμε y τυχόν στοιχείο : $y \in f(X) \cap f(Y) \iff y \in f(X) \wedge y \in f(Y)$

τότε:

$(\exists x_1 \in X) : y = f(x_1) \wedge (\exists x_2 \in Y) : y = f(x_2)$

Άρα $f(x_1) = f(x_2) \xRightarrow{f \text{ αμφιμ.}} x_1 = x_2 = x$

Άρα $\exists x \in X \cap Y : f(x) = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y \in f(X \cap Y)}$

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε το $(*)$ και έστω f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη

τότε υπάρχουν x_1, x_2 στο A με $x_1 \neq x_2$ τ' $f(x_1) = f(x_2) = y \in B$

$X = \{x_1\}$ τ' $Y = \{x_2\} \xRightarrow{*} f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\})$

$\emptyset = f(\emptyset) = f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$

Δηλ. $\emptyset = \{y\}$ άτοπο.

$f: A \to B$, $Y \subseteq B$ τότε $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

<u>ΠΡΟΤ.</u> Έστω $f: A \to B$. Τότε f επί του $B \iff \left\{ \begin{array}{l} f(f^{-1}(Y)) = Y \\ \text{για όλα τα } Y \subseteq B \end{array} \right.$ (*)

<u>Αποδ</u> ($\Rightarrow$) Έστω $f: A \to B$ είναι επί δηλ $R(f) = B$

Ισχύει πάντοτε (γενικά) ότι $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$, $Y \subseteq B$

Αρκεί ν.δ.ο. όταν f επί τότε $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$, $Y \subseteq B$

Έστω $y \in Y \Rightarrow (\exists x \in A)\ y = f(x) \in Y \Rightarrow x \in f^{-1}(Y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(Y)) \xRightarrow{f(x)=y} y \in f(f^{-1}(Y))$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η (*) ισχύει & η f δεν είναι επί

Τότε $(\exists y \in B)(\forall x \in A)\ f(x) \neq y$. Θεωρούμε το σύνολο $\{y\} = Y \subseteq B$

Άρα λόγω της (*) έχουμε: $f(\emptyset) = f(\underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{\emptyset}) = \{y\}$

Δηλ. $\emptyset = \{y\}$ άτοπο!

$f: A \to B$, B διατεταγμένο σύνολο $\preceq$ $\qquad x \preceq f(x)$

f άνω φραγμένη $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$ $R(f)$ άνω φραγμένο
f κάτω —//— $\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ $R(f)$ κάτω —//—

f φραγμένη $\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ $R(f)$ φραγμένο. $\qquad R(f) \subseteq B$

1) $\alpha \in B$ άνω φράγμα της $f \Leftrightarrow \alpha$ άνω φράγμα του $R(f)$
$\beta \in B$ κάτω —//— $\Leftrightarrow \beta$ κάτω —//—

$\sup f = \sup f(x) = \sup R(f)$

$\inf f = \inf f(x) = \inf R(f)$ $\qquad$ max, min

$f: A \to B \quad (A, \preceq_A), (B, \preceq_B)$

f αύξουσα $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2$ του $A)$ $x_1 \preceq_A x_2 \Rightarrow f(x_1) \preceq_B f(x_2)$

f φθίνουσα $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2$ του $A)$ $x_1 \preceq_A x_2 \Rightarrow f(x_1) \succeq_B f(x_2)$

E καλά διατεταγμένο σύνολο, $A \subseteq E$, $f: E \to A$ γνήσια αύξουσα
Τότε για κάθε $x \in E$ ισχύει $x \preceq f(x)$

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε το $B = \{x \in E : f(x) \prec x\}$ $\qquad$ Αν $B = \emptyset$ τότε δεν έχω ν' αποδείξω τίποτα.

Έτσι υποθέτω $B \neq \emptyset$ και θα καταλήξω σε άτοπο

$\emptyset \neq B \subseteq E \xrightarrow[\text{διατ.}]{E \text{ καλά}}$ Άρα υπάρχει το $\min B = \beta \in B$ Άρα $f(\beta) \prec \beta \Rightarrow$

$\xRightarrow[\text{αύξουσα}]{f \text{ γνήσια}} f(f(\beta)) \prec f(\beta)$ $\quad$ Άρα $f(\beta) \in B \overset{\beta = \min B}{\Longrightarrow} \beta \preceq f(\beta)$ Άτοπ.

$f, g : A \to \mathbb{R}$

Τότε: $\inf(-f) = -\sup(f)$,

$\sup(-f) = -\inf(f)$

Απόδ

Θεωρώ x τυχόν, $x \in A$. Τότε:

$f(x) \leq \sup f \Rightarrow -f(x) \geq -\sup f \Rightarrow$

$\Rightarrow (-f)(x) \geq -\sup f$ x τυχόν

$-\sup f$ κάτω φράγμα της $-f$ $\Rightarrow \inf(-f) \geq -\sup f$

Για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$-f(x) \geq \inf(-f) \Leftrightarrow f(x) \leq -\inf(-f)$

$\Rightarrow \sup f \leq -\inf(-f) \Rightarrow -\sup f \geq \inf(-f)$

Άρα ισχύει η ισότητα